Goursat問題について (線型および非線型偏微分方程式の研究)

AUTHOR(S):

長谷川, 幸子

CITATION:

長谷川, 幸子. Goursat問題について (線型および非線型偏微分方程式の研究). 数理解析研究所講究録 1980, 402: 100-111

ISSUE DATE:

1980-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/102289

数理解析研究所講究録
402巻 1980年 100-111

Goursat問題について

京大 理(研修員) 長谷川幸子

次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

(1) $P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) \equiv \sum_{i+j+|\alpha|\leq m} a_{ij\alpha}\, \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^\alpha$

ここで $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $(t, x, y) \in R_+^1 \times R^1 \times R^\ell$.

最高階(m階微分)の項をP_m, $m-1$階微分の項をP_{m-1}, 残りをR_{m-2}とすれば, Pは次のようにあらわされる。

(2) $P = P_m + P_{m-1} + R_{m-2}$.

P_mに対して, 次の仮定をおこう。

(A-1) $t=0$は, 一重特性面である, 即ち, ∂_t^mの係数 $a_{m,0,0}=0$ かつ $\sum_{j+|\alpha|=1} |a_{m-1,j,\alpha}| \neq 0$.

仮定(A-1)の下で, 次の問題(Goursat問題)を, $\mathcal{E}_{t,x,y}$のクラスで考えよう。

(3) $P(\partial_t, \partial_x, \partial_y)u(t,x,y) = f(t,x,y) \in \mathcal{E}_{t,x,y}$ $(t \geq 0)$

$$(4)\quad \begin{cases} \partial_t^i u(0,x,y) = u_i(x,y) \in \mathcal{E}_{x,y}, & 0 \le i \le m-2 \\ u(t,0,y) = \varphi(t,y) \in \mathcal{E}_{t,y} & (t \geq 0) \end{cases}$$

(4)をGoursat dataとよぼう。ここで$\{u_i(x,y)\}_{0\le i\le m-2}$と$\varphi(t,y)$との間には、次の関係式（いわゆるcompatibility条件）がなりたっているとする。

$$(5)\quad \partial_t^i \varphi(0,y) = u_i(0,y) \qquad 0 \le i \le m-2.$$

<u>定義</u>　Goursat問題が$\mathcal{E}$-well posedであるとは、任意の$\{u_i\}_{0\le i\le m-2}$, $\varphi(t,y)$, $f(t,x,y)$に対して、(3), (4)をみたす解$u(t,x,y)$が$\mathcal{E}_{t,x,y}$の中に一意的に存在することである。

Banachの定理より、$\mathcal{E}$-well posedであれば、写像：$(\{u_i\},\varphi,f) \longrightarrow u$は、$\prod^{m-1}\mathcal{E}_{xy}\times\mathcal{E}_{ty}\times\mathcal{E}_{t,x,y}$から$\mathcal{E}_{t,x,y}$の中への連続写像になっている。

<u>命題1</u>　仮定(A-1)の下に、Goursat問題が、$\mathcal{E}$-well posedであるならば、$\partial_t^{m-1}\partial_x$の係数：$a_{m-1,1,0} \neq 0$である。

証明　$a_{m-1,1,0}=0$ならば、解が存在しないようなdata $\{\{u_i\},\varphi,f\}$が、あることを示そう。

$a_{m-1,1,0}=0$の時、(3)で$f=0$とおいた式は、

$$(3')\quad \sum_{|\alpha|\le 1} a_{m-1,0,\alpha}\,\partial_t^{m-1}\partial_y^{\alpha} u(t,x,y)$$
$$+\sum_{i\le m-2} a_{ij\alpha}\,\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^{\alpha} u(t,x,y) = 0.$$

Goursat data として，次のものを考えよう．

$$(4')\begin{cases}\partial_t^i u(0,x,y)=0 & 0\le i\le m-2\\ u(t,0,y)=\psi(y)\,t^{m-1}/(m-1)! & \psi(y)\in\mathcal{E}_y\end{cases}.$$

この data は明らかに compatibility 条件をみたしている．

(3′)で $t=0$，$x=0$ とおき，(4′)を考慮すれば，

$$(5)\quad \sum_{|\alpha|\le 1} a_{m-1,0,\alpha}\,\partial_y^\alpha \psi(y)=0.$$

仮定(A−1)より，(5) をみたすということは，$\psi(y)$ に対する制限になっている．したがって，(5) をみたさないような $\psi(y)$ に対しては，Goursat 問題 (3′)−(4′) の解は存在しない．　　q.e.d.

煩雑さを避けるために，記号を少し変えよう．(A−1)と，$\mathcal{E}$-well posed を仮定すれば，P は次のように書ける．

$$(6)\quad P=\Big(\partial_x+\sum_{j=1}^{\ell} a_j\,\partial_{y_j}+c\Big)\partial_t^{m-1}$$
$$+\Big\{h_2(\partial_x,\partial_y)\,\partial_t^{m-2}+\cdots\quad +h_m(\partial_x,\partial_y)\Big\}.$$

ここで $h_i(\xi,\eta)$ は，(ξ,η) の i 次多項式である．

P_m の係数に関して，命題1の他に，さらに次の制限が加わる。

<u>命題2</u>　仮定(A−1)の下に，Goursat 問題が $\mathcal{E}$-well posed であるならば，a_j は実数である．

この証明は後で与える。

注意 1　命題 1, 2 より, (A−1) と $\mathcal{E}$-well posed を仮定すれば, もとの方程式 (3) は, 次の形に帰着できる。

$$(7)\quad \partial_t^{m-1}\partial_x u = \sum_{\substack{i+j+|\alpha|\leq m \\ i\leq m-2}} a_{ij\alpha}\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^\alpha u + f .$$

さて, ここで P の特性方程式を考えよう。

$P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta)\tau^{m-1} + b_2(\xi, \eta)\tau^{m-2} + \cdots + b_m(\xi, \eta)$.

$b_1(\xi, \eta) \neq 0$ のは, P_m は τ の $m-1$ 次の多項式である。このとき, P の特性方程式 $P_m(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根を, 特性根とよび, $\tau_i(\xi, \eta)$　$1 \leq i \leq m-1$ であらわそう。

定理 1　(A−1) の下で, Goursat 問題が $\mathcal{E}$−well posed であるならば, $(\xi, \eta) \in R^1 \times R^\ell$ に対して, 特性根は全て実数である。

証明は, [2] で双曲型方程式に対して用いられたと同じ方法で, 特性根に実数でないものがあるとすれば, data から解への連続性が破れることを示す。

この定理は, 双曲型方程式の Cauchy 問題に対する結果と類似である。しかし次の定理は, Goursat 問題特有の性質であろうと思われる。

定理 2　(A−1) の下で, Goursat 問題が $\mathcal{E}$−well posed であるならば, $P_m(\tau, \xi, \eta)$ は, $b_1(\xi, \eta)$ で割り切れなければな

らない。即ち

(8) $\quad P_m(\tau,\xi,\eta)=b_1(\xi,\eta)\,\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$.

ここで，$\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$ は $m-1$ 次同次式である。

証明の方針： 方程式(7) を考えよう。定理2の主張は，$\eta\in R^1$ とすれば "$\mathcal{E}$-well posed ならば，$a_{m-i,0,i}=0 \quad 2\leq i\leq m$" である。はじめに，矛盾によって $a_{m-2,0,2}=0$ を示す。詳しく云えば，$\mathcal{E}$-well posed と，$a_{m-2,0,2}\neq 0$ を仮定して，(7)の解の列で，data から解への連続性がなりたたないようなものを構成する。次に $a_{m-i,0,i}=0 \ (3\leq i\leq m)$ を次の方法で示す。即ち，$a_{m-2,0,2}=0$ かつ $\sum_{i=3}^{m}|a_{m-i,0,i}|\neq 0$ とすれば，特性多項式 $P_m(\tau,\xi,\eta)=0$ が，虚根をもつことが示され，定理1より，$\mathcal{E}$-well posed であることに反する。

次に低階の部分 P_{m-1} に対する制約をのべる。(A-1)の他にさらに次を仮定する。

(A-2) $\quad \mathring{Q}_{m-1}(\partial_t,\partial_x,\partial_y)$ は t 方向に強双曲型である。即ち，$\mathring{Q}(\tau,\xi,\eta)=0$ の根 $\tau_i(\xi,\eta)$ は，$(\xi,\eta)\in R^1\times R^\ell\setminus\{0\}$ に対して，全て実で，かつ相異なる。

<u>定理3</u> 仮定(A-1)，(A-2)の下に，Goursat 問題が，$\mathcal{E}$-well posed であるならば，P_{m-1} は次の形でなければならない。

(9) $\quad P_{m-1}(\tau,\xi,\eta)=c\,\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$.

この定理は，双曲型方程式の Cauchy 問題の Levi 条件に類似のものである。Cauchy 問題では，特性根が重根になって，はじめて Levi 条件がでてきたが，Goursat 問題では，特性根が単根であっても，このような条件がでてくる。

定理3の基本的な証明の方針は，定理1と同じである。

定理1, 2, 3 の逆である次の定理がなりたつ。

定理4

$$P(\tau,\xi,\eta) = (b_1(\xi,\eta)+c)\left(\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)\right) + R_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$$

ここで $b_1(\xi,\eta)$ は (ξ,η) の一次実多項式，$b_1(1,0)=1$，

$\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\partial_t,\partial_x,\partial_y)$ は t 方向に強双曲型とする。

上の P に対する Goursat 問題は，$\mathcal{E}$-well posed である。

証明は，逐次近似法によって，解を構成する。

定理1〜4の証明については，[1], [3]を参照して下さい。

命題2の証明

ここで，先に残しておいた命題2の証明をしよう。

$Im\, a_j \neq 0$ とすると，data $\{u|_{s},\varphi,f\}$ から，解 $u(t,x,y)$ への連続性が破れることを示そう。

uとして，t, x, y_jのみの関数で，$Pu=0$なるものを考えよう。

$$Pu = (\partial_x - a\partial_y + c)\partial_t^{m-1}u + \left(h_2(\partial_x, \partial_y)\partial_t^{m-2} + \cdots + h_m(\partial_x \partial_y)\right)u = 0.$$

ここで $a = -a_j$，$\eta \in R^1$ である。

$$u = e^{i\eta(ax+y) - cx}\, v(t, x)$$

とおけば，$v(t, x)$のみたす方程式は，

$$(10)\quad \partial_x \partial_t^{m-1} v = -\left\{ h_2(\partial_x + ia\eta - c, i\eta)\partial_t^{m-2} + \cdots + h_m(\partial_x + ia\eta - c, i\eta)\right\} v(t, x)$$

$$\equiv \sum_{s=2}^{m} \sum_{p+q \le s} a_{spq}\, \partial_x^p \eta^q \partial_t^{m-s} v$$

である。$v(t, x)$に対して，次のGoursat dataを考えよう。

$$(11)\quad \begin{cases} \partial_t^i v(0, x) = 0 & 0 \le i \le m-2 \\ v(t, 0) = t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}.$$

(10), (11)をみたす形式解を，

$$(12)\quad v(t, x) = \sum_{j, k} v_{j,k}\, t^j x^k / j!\,k!$$

とおこう。(11)より

$$(11')\quad \begin{cases} v_{j,k} = 0 & j = 0, 1, \cdots m-2,\ k = 0, 1, 2, \cdots \\ v_{m-1,0} = 1 & \\ v_{j,0} = 0 & j \ne m-1 \end{cases}.$$

(12)を(10)に代入して，両辺の $t^l x^r$ の係数をくらべると，

$$(13)\quad v_{m-1+l,\,r+1} = \sum_{s=2}^{m} \sum_{p+q\le s} a_{spq}\, \eta^{q}\, v_{l+m-s,\,r+p}$$

(11′)と(13)より

$$(14)\quad v_{m-1+l,\,k} = 0 \qquad k > l \geqq 0.$$

$k \le l$ なる項については，η が正の実数で，大の所で次の評価を得る。

$$(15)\quad |v_{l+m-1,\,k}| \le A C^{l} \eta^{k+l} (k+l)! \qquad k \le l.$$

A, C は定数.

(15)の証明は，l に関する帰納法による。

(12)と(14)より $v_{m-1,0} = 1$ を使って次の式が得られる。

$$(16)\quad v(t,x) = \sum_{k\le l} v_{m-1+l,\,k} \frac{t^{m-1+l}\, x^{k}}{(m-1+l)!\; k!}$$

$$= \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{l\geqq 1} \sum_{k=0}^{l} v_{m-1+l,\,k} \frac{t^{m-1+l}\, x^{k}}{(m-1+l)!\; k!}.$$

上式第2項を，(15)を使って評価しよう。

$$\sum_{l\geqq 1} \sum_{k=0}^{l} A C^{l} \eta^{k+l} (k+l)! \frac{t^{m-1+l}\, x^{k}}{(m-1+l)!\; k!}$$

$$\le \sum_{l\geqq 1} \sum_{k=0}^{l} A C^{l} \eta^{k+l}\, 2^{k+l}\, t^{m-1+l}\, x^{k}$$

$x = x_0$ で x を固定し，$C > 1$，$\eta > 1$ とすれば，上式は次の式でおさえられる。

(17) $A t^{m-1} \sum_{\ell \geq 1} C^\ell \eta^{2\ell} 2^{2\ell} t^\ell (1+|x_0|)^\ell$.

(18) $0 < t < 1/4C\eta^2(1+|x_0|)$

のとき，級数(17)は収束する。結局(18)をみたすtに対して，

$$|v(t, x_0)| > t^{m-1}\left(1 - \sum_{\ell=1}^{\infty} A\{4C\eta^2(1+|x_0|)t\}^\ell\right)$$

を得る。よって，例えば，

$$t_\eta = 1/8C\eta^2(1+|x_0|)\cdot A$$

ととれば，

(19) $|v(t_\eta, x_0)| \geq M/\eta^{2(m-1)}$

を得る。ここでMは，ηに無関係な正の定数。

さて，もとのuにもどれば，

(20) $u = e^{ia\eta x + i\eta y - cx} v(t, x)$

であった。$\operatorname{Im} a \neq 0$ より，$(\operatorname{Im} a)x_0 < 0$ となるように

x_0をとろう。つぎの評価が得られる。

(21) $|u(t_\eta, x_0, y)| = e^{-(\operatorname{Im} a)\cdot x_0 \eta - \operatorname{Re} C x_0} |v(t_\eta, x_0)|$

$$\geq e^{-(\operatorname{Im} a)x_0\eta - \operatorname{Re} C x_0} M \eta^{-2m+2}$$

一方(20)のuのみたすGoursat dataは，(11)より

$$\begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ u(t, 0, y) = e^{i\eta y} t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}$$

であるから，ℰ-well posed の仮定より，解はηに関して，

高々多項式の増大 order をもつ。これは (21) に矛盾する。

q. e. d

西谷の定理について

最後に西谷氏が [3] で得られた結果についてのべよう。

次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

$$(N)\quad A(\partial_t, \partial_x, \partial_y) = \sum_{j=l}^{m} C_j(\partial_x, \partial_y)\partial_t^{m-j}, \quad (t, x, y) \in R_+^1 \times R^1 \times R^l.$$

ここで $C_j(\xi, \eta)$ は、(ξ, η) に関する j 次多項式とする。j 次同次部分を C_j^0 であらわそう。

仮定　$C_l^0(1, 0) = 1$　即ち $\partial_x^l \partial_t^{m-l}$ の係数は 1.

上の仮定の下で、次の Goursat 問題を考えよう。

$$(P)\quad \begin{cases} A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)\, u(t, x, y) = 0 \\ \partial_t^i u(0, x, y) = \varphi_i(x, y) \in \mathcal{E}_{x,y} & 0 \le i \le m-l-1 \\ \partial_x^j u(t, 0, y) = \psi_j(t, y) \in \mathcal{E}_{t,y} & 0 \le j \le l-1 \end{cases}$$

もちろん $\{\varphi_i\}$ と $\{\psi_j\}$ の間には、compatibility 条件がなりたっているとする。

定理 [Nishitani]　上記の仮定の下で、(P) が $\mathcal{E}$-well posed であるための必要かつ十分な条件は、$\varepsilon > 0$ が存在して、$0 < |\delta| \le \varepsilon$ であるような任意の δ に対して、$A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は、$(1, \delta, 0)$ 方向に双曲型である。

証明は〔3〕をみて下さい。

(N)の形に書けるということは，方程式に対してどのくらいの制限になっているのであろうか。$\ell=1$（即ち$t=0$が一重特性面）の時には，いつでもこの形になっている。さらに$t=0$が特性面でかつ，$A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$が，いずれかの方向に双曲型なら，$(N)$の形になっていることが示される。
(N)の形及び，西谷の定理から，今までのべてきたGoursat問題は，双曲型方程式と非常に密接な関係があることがわかる。

(N)以外の形をしたもので，Goursat問題が$\mathcal{E}$-well posedなものがあるだろうか？

今のところ，(N)以外の形をしたものについて，Goursat問題は定義していないので，一応次のように考えておこう。偏微分作用素の最高階部分については(N)と同じ制限をおくが，低階（$m-1$階微分以下の部分）については，何も制限をおかない，即ち

$$L=\sum_{j=\ell}^{m} C_j^{\ell}(\partial_x, \partial_y)\partial_t^{m-j}+P_{m-1}(\partial_t, \partial_x, \partial_y),$$

さらに$C_\ell^{\ell}(1.0)=1$も仮定する，dataは(P)と同じもの，（$t=0$に$m-\ell$個，~~$x=\ell$~~ $x=0$にℓ個与える）とする。

この問に対する答が，どうなのか今のところ（私には）わからないが，ただ一つ否定的な例がある。

$$L = \partial_t^2 + \partial_t \partial_x^2$$

で，$t=0$ に1個，$x=0$ に2個 data を与える Goursat 問題を考える時，これは $\mathcal{E}$-well posed ではない。証明は，$L=\partial_t(\partial_t+\partial_x^2)$ として，$\partial_t+\partial_x^2$ が semi elliptic であることを使えばよい。

参照文献

[1] Y. Hasegawa : On the C^∞-Goursat problem for equations with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 19-1 (1979) 125—151

[2] S. Mizohata : Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961—1962) 109—127

[3] T. Nishitani : On the $\mathcal{E}$-well posedness for the Goursat problem with contant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 20-1 (1980) 179—190.